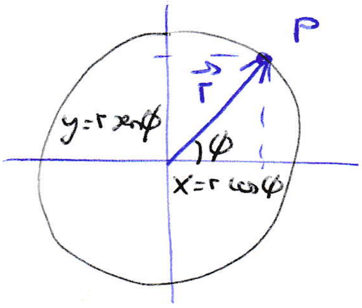
CINEMÁTICA: Movimientos circulares y oscilatorios

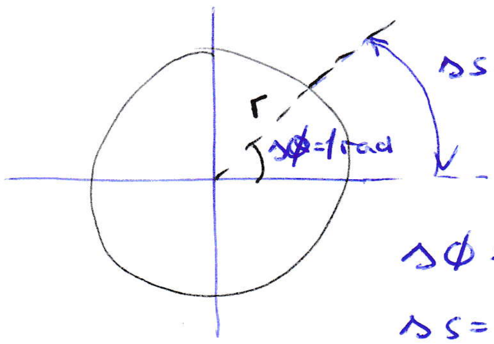
1. Magnitudes cinemáticas angulares

- El móvil describe una circunferencia.
- En función de sus componentes cartesianas el vector de posición es:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = r \cdot \cos\phi \cdot \vec{i} + r \operatorname{sen}\phi \, \vec{j}$$

PERO es mejor indicarlo por sus magnitudes angulares.





$$\Delta\phi = \frac{\Delta s}{r}$$

$$\Delta s = \Delta\phi \cdot r$$

1.1. Posición angular (ϕ)

Ángulo del vector de posición con el semieje X

$$\phi = \phi(t)$$

Su unidad es el radián (rad) $\Rightarrow$ Ángulo cuyo arco coincide con el radio de la circunferencia.

1.2. Velocidad angular (ω)

$$\omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} \qquad [\omega_m] = T^{-1}$$

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt} \quad ; [\omega] = T$$

ω = unidad S.I rad/s pero a veces r.p.m

$$1\,rpm = \frac{2\pi\,rad}{60\,s}$$

1.3. Aceleración angular (α)

media $\Rightarrow$ $\alpha_m = \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$; $[\alpha_m] = T^{-2}$

instantánea $\Rightarrow$ $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$; $[\alpha] = T^{-2}$

α = unidad S.I rad/s^2

1.4. Relación con las magnitudes lineales.

	Magnitud lineal	Magnitud angular	Relación
Espacio recorrido	Δs	$\Delta \phi$	$\Delta s = \Delta \phi \cdot r$
Velocidad	v	ω	$v = \omega \cdot r$
aceleración tangencial	a_t	α	$a_t = \alpha \cdot r$
Aceleración normal	a_n	—	$a_n = \omega^2 \cdot r$

2. Movimiento circular uniforme (M.C.U)

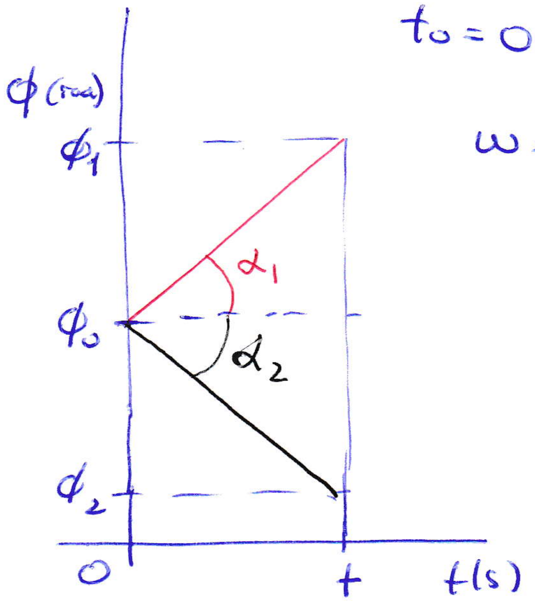
El movil recorre una circunferencia con celeridad constante.

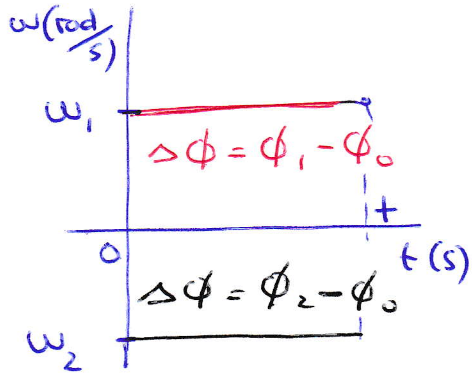
$$a_t = 0 \;;\quad a_n = \frac{v^2}{r} \quad v = \omega \cdot r \;\Big]\; a_n = \omega^2 \cdot r = cte \quad \alpha = 0$$

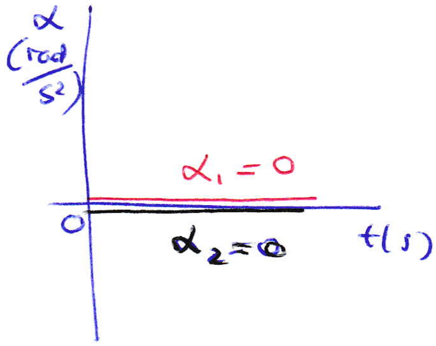
2.1. Ecuaciones y gráficas $\Rightarrow$ equivalentes a los m.r.u.

$t_0 = 0 \;;\; \alpha = 0$

$$\omega = \omega_m = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\phi - \phi_0}{t} \Rightarrow \phi = \phi_0 + \omega \cdot t$$







2.2. Periodo y frecuencia

El M.C.U es un movimiento periódico ya que presenta las mismas características cada cierto tiempo.

1) Periodo (T) $\Rightarrow$ tiempo que tarda en dar una vuelta

2) Frecuencia (f) $\Rightarrow$ número de vueltas en un segundo.

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{unidad } \frac{1}{s} = Hz \text{ (Hercio)}$$

como es una vuelta completa es 2π

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \Rightarrow \boxed{\omega = 2\pi f}$$

3 • Movimiento circular uniformemente acelerado (M.C.U.A)

El móvil recorre una circunferencia con aceleración angular constante.

$a_t = \alpha \cdot r = cte$; $a_n = \omega^2 \cdot r \neq cte$

No tiene sentido hablar de T ni f. ya que el tiempo en completar una vuelta no es cte.

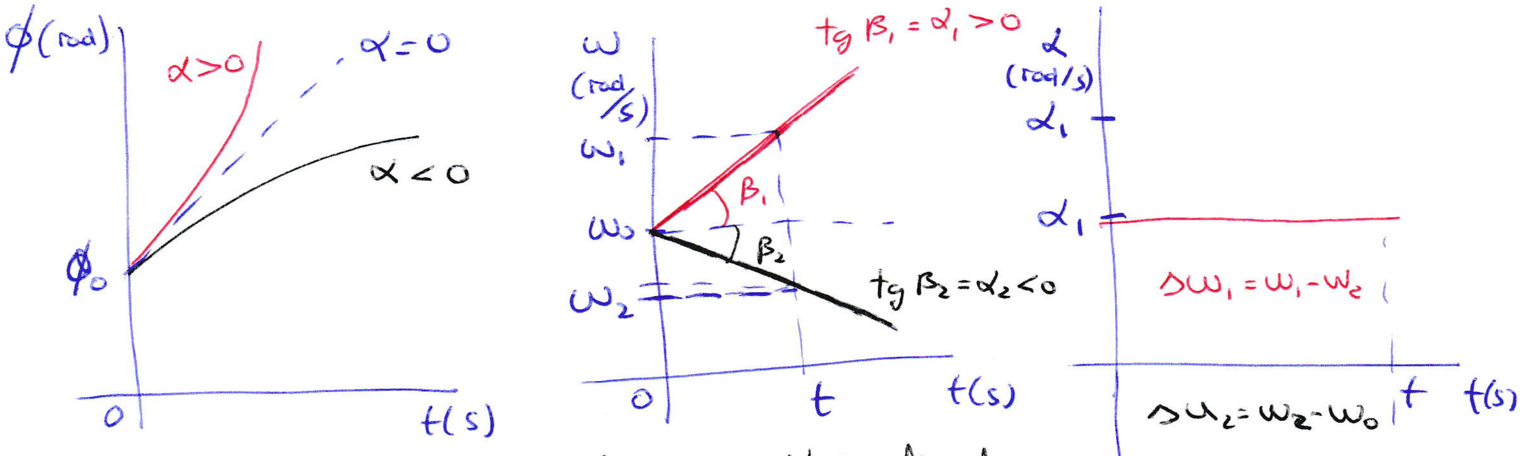
3.1. Ecuaciones y gráficas

$t_0 = 0$ como $\alpha = cte \Rightarrow \alpha = \alpha_m$

$$\alpha = \alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t}$$

Igual que con el M.R.U.A resulta del área bajo la curva de la gráfica ω-t:

$$\boxed{\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2}$$



3.2. Relación con las magnitudes lineales

$$s = \phi \cdot r = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t \cdot t^2 \Rightarrow \boxed{\Delta\phi = \phi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2}\alpha t^2}$$

$$v = \omega \cdot r = v_0 + a_t \cdot t \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t}$$

$$v^2 = 2 \cdot a_t (s - s_0) \Rightarrow \boxed{\omega^2 = 2 \cdot \alpha (\phi - \phi_0)}$$

4. Movimiento armónico simple. (M.A.S)

4.1. Movimiento oscilatorio o vibratorio.

Es el movimiento periódico que describe una partícula cuando sobre una misma trayectoria, se mueve alternativamente en un sentido y en otro respecto de un punto central.

vibratorio → mov. periódicos pequeños (átomos red cristal)

oscilatorio → " grandes (péndulo)

Se representan mediante la función seno o coseno, dichas funciones se llaman armónicas, por ello este movimiento también se llama armónico.

4.2. MAS y magnitudes del MAS.

- El MAS es el mas importante de los mov. oscilatorios por su simplicidad y porque representa muchos sistemas físicos.

- Una partícula describe un MAS cuando su posición se expresa por:

$$\boxed{\begin{array}{c} x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0) \\ A, \omega, \phi_0 \text{ son ctes} \end{array}}$$

- Además de T y f otras magnitudes son:

$$\boxed{\text{También } \cos\alpha = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}$$

1) Elongación (x): posición en m.

2) Amplitud (A): elongación máxima en valor absoluto.

3) Fase (ϕ): ángulo en radianes ⇒ $\phi = \omega t + \phi_0$

4) Fase inicial (ϕ_0): fase en el origen de tiempos.

5) Frecuencia angular o pulsación (ω): es la velocidad angular.

4.3. Cinemática del MAS

Consideremos una partícula que describe un MAS:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega t + \phi_0)$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0)}$$

¡OJO! derivada de sen x

$$\frac{d(\text{sen}\, x)}{dt} = \cos x$$

$$\frac{d(\text{sen}\, x t)}{dt} = x \cdot \cos x t$$

Los valores del coseno oscilan entre -1 y $+1$

$$|v_{max}| = A \cdot \omega$$

¡OJO! derivada de cos x

$$\frac{d(\cos x)}{dt} = -\text{sen}\, x$$

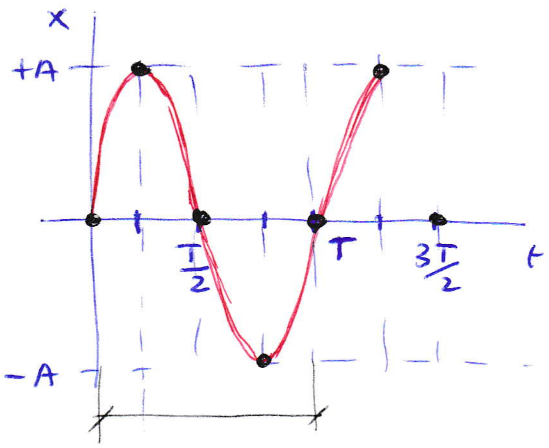
$$\frac{d(\cos x \cdot t)}{dt} = -x\, \text{sen}\, x \cdot t$$

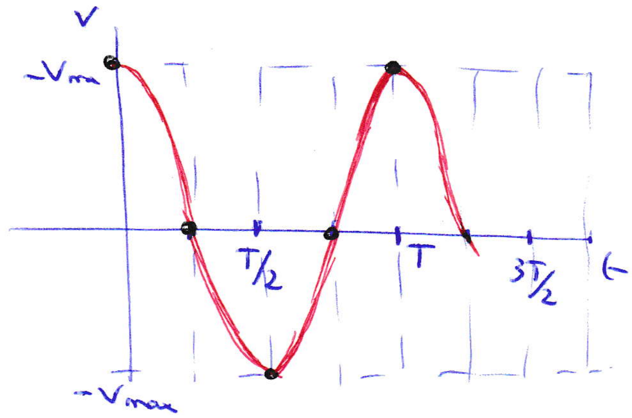
$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \text{sen}(\omega t + \phi_0)}$$

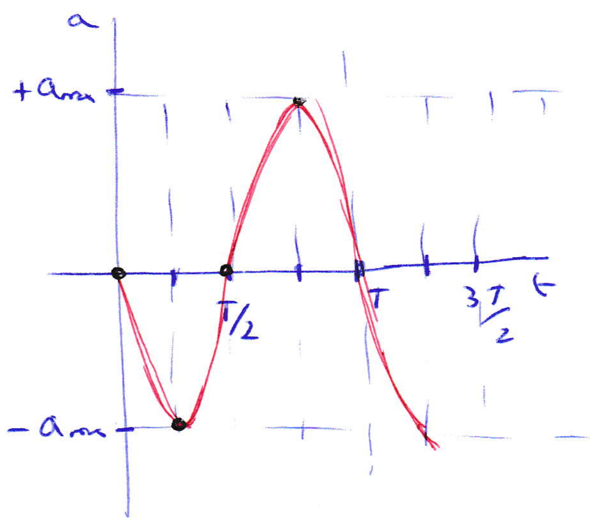
$$|a_{max}| = A \cdot \omega^2$$

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

cuando $x = 0 \Rightarrow a = 0$ por ello al Punto O se le llama POSICIÓN DE EQUILIBRIO







Relación entre x y v

$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) \;/\; v = A\omega\cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$v^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t + \phi_0) =$$

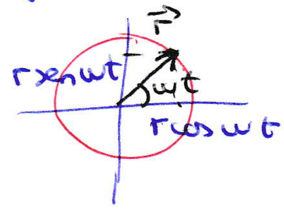
$$= A^2\omega^2\left[1 - \text{sen}^2(\omega t + \phi_0)\right] =$$

$$= \omega^2\left[A^2 - \underbrace{A^2\text{sen}^2(\omega t + \phi_0)}_{x^2}\right] = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$\boxed{v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}}$$

4.4. El M.A.S. como proyección del M.C.U

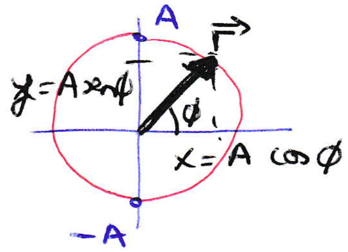
El M.A.S se puede obtener al proyectar los puntos del M.C.U. Así:

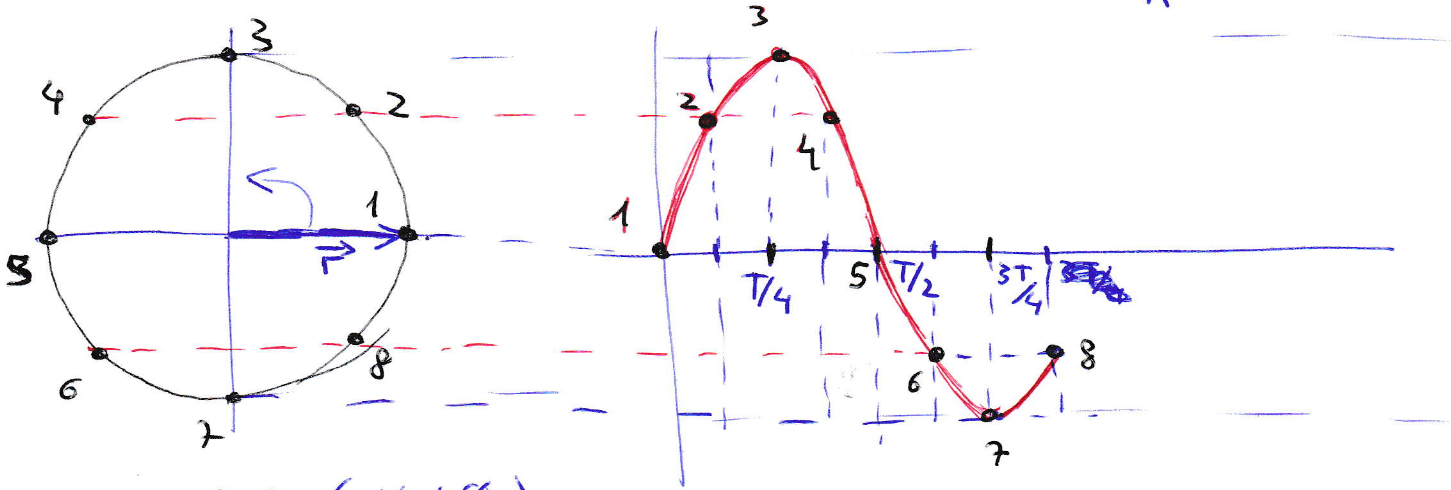


$$\vec r = r\left[\cos(\omega t)\,\vec i + \mathrm{sen}(\omega t)\,\vec j\right]$$

Definimos un vector rotatorio como aquel cuyo origen es el del origen de coordenadas y su extremo en el punto se mueve con M.C.U. La proyección del vector rotatorio viene dado por las expresiones:

$$x = A\cdot\cos(\overbrace{\omega t + \phi_0}^{\phi})$$
$$y = A\cdot\mathrm{sen}\,(\underbrace{\omega t + \phi_0}_{\phi})$$





$$r = r\cdot\cos(\omega t + \phi_0)$$

Haciendo lo mismo con v y con a tenemos:

$$v = -r\cdot\omega\cdot\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi_0)$$

$$a = r\cdot\omega^2\cdot\cos(\omega t + \phi_0)$$